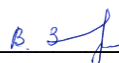


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
алгебры и математических
методов гидродинамики

 (В. Г. Звягин)
18.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.12 Математическое моделирование динамических систем с памятью

1. Шифр и наименование направления подготовки:

01.04.04 Прикладная математика

2. Профиль подготовки:

Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

3. Квалификация выпускника: Магистр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

6. Составители программы: профессор, д.ф.-м.н., Орлов Владимир Петрович

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета
протокол № 0500-03 от 18.03.2025

8. Учебный год: 2025-2026

Семестр: 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели учебной дисциплины:

Овладение элементарными знаниями в области математических моделей движущихся систем с памятью

Задачи учебной дисциплины:

- изучение основных фактов динамики систем с памятью;
- сформировать способность применения математических формализмов в профессиональной деятельности;
- овладение методами, позволяющими осуществлять качественное исследование решений прикладных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: (цикл, к которому относится дисциплина, требования к входным знаниям, умениям и компетенциям, дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей)

Учебная дисциплина «Математическое моделирование динамических систем с памятью» относится к Блоку 1, обязательной части.

Теория математических моделей движущихся систем лежит в основе математического моделирования конкретных задач в различных областях техники, механики строительства. Курс опирается на основные физические законы, дифференциальные уравнения и математический анализ.

11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-2	Способен разрабатывать и развивать математические методы моделирования объектов, процессов и систем в области профессиональной деятельности	ОПК-2.1	Знает и использует основные методы и приемы построения математических моделей	Знать: современные методы и классические результаты построения математических моделей Уметь: использовать изученные методы для построения математических моделей Владеть: источниками информации, теоретическими подходами, методологией математических моделей с памятью
		ОПК-2.2	Владеет навыками построения математических моделей, выделяет нужные структуры изучаемых процессов	Знать: современные методы построения и выделения структур теории математических моделей движущихся систем Уметь: строить математические модели и структурировать изучаемые процессы Владеть: навыками построения математических моделей, навыками выделения нужной структуры процессов в профессиональной

				деятельности
		ОПК-2.3	Имеет практический опыт создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания	Знать: современные методы и теории, используемых для описания, создания и исследования различных математических моделей с памятью Уметь: создавать, исследовать и описывать математические модели Владеть: практическим опытом создания и исследования математических моделей и методами их описания

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 3/108.

Форма промежуточной аттестации: зачет

13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		2
Аудиторные занятия	24	24
в том числе: лекции	14	14
практические	14	14
лабораторные	-	-
Самостоятельная работа	80	80
Итого:	108	108

13. 1. Содержание разделов дисциплины:

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Описание движения жидкостей.	Определения и основные понятия. Эйлера и Лагранжевы подходы описания движения жидкостей. Эйлера и Лагранжевы координаты. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера. Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа. Основные кинематические и геометрические характеристики движущейся жидкости. Виды жидкостей.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=25798
1.2	Элементы механики сплошной среды.	Тензор напряжений. Тензор скоростей деформаций. Тензор деформаций.	

		Реологические соотношения. Уравнение неразрывности. Классификация сплошных сред.	
1.3	Уравнения движения жидкостей.	Закон сохранения массы. Дифференцирование по времени интегралов по объемам. Уравнение неразрывности. Уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения движения вязкой жидкости.	
1.4	Существование решений уравнений движения.	Функциональные пространства гидродинамики. Свойства операторов гидродинамики. Метод Галеркина. Априорные оценки. Сходимость последовательных приближений.	
2. Практические занятия			
2.1	Описание движения жидкостей.	Определения и основные понятия. Эйлеров и Лагранжев подходы описания движения жидкостей. Эйлеровы и Лагранжевы координаты. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера. Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа. Основные кинематические и геометрические характеристики движущейся жидкости. Виды жидкостей.	https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=25798
2.2	Элементы механики сплошной среды.	Тензор напряжений. Тензор скоростей деформаций. Тензор деформаций. Реологические соотношения. Уравнение неразрывности. Классификация сплошных сред.	
2.3	Уравнения движения жидкостей.	Закон сохранения массы. Дифференцирование по времени интегралов по объемам. Уравнение неразрывности. Уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения движения вязкой жидкости.	
2.4	Существование решений уравнений движения.	Функциональные пространства гидродинамики. Свойства операторов	

		гидродинамики. Метод Галеркина. Априорные оценки. Сходимость последовательных приближений.	
--	--	--	--

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Описание движения жидкостей.	3	3		20	26
2	Элементы механики сплошной среды.	3	3		20	26
3	Уравнения движения жидкостей.	3	3		20	26
4	Существование решений уравнений движения.	6	6		20	32
Итого:		14	14		80	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отводится 80 часов. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Математическое моделирование динамических систем с памятью» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным

планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме. Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем. Для успешного и плодотворного обеспечения итогов самостоятельной работы разработаны учебно-методические указания к самостоятельной работе студентов над различными разделами дисциплины. Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Звягин В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. - М. : КРАСАНД, 2012. - 416 с.
2	Ландау Л.Д. Теоретическая физика : учебное пособие для студ. физических специальностей ун-тов : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003- . Т. 6: Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц ; под ред. Л.П. Питаевского. - Изд. 5-е, стер. - 2006. - 731 с. : ил. - Предм. указ. : с. 730-731.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. - М. : Едиториал УРСС, 2004. - 112 с.
4	Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. - 2-е изд. - М. : Наука, 1970. - 288 с.
5	Темам Р. Уравнения Навье-Стокса : Теория и численный анализ / Р. Темам ; пер. с англ. В.А. Новикова, А.М. Франка ; под ред. Б.Г. Кузнецова, Н.Н. Яненко. - М. : Мир, 1981. - 407, [1] с. : ил.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
7	Википедия : свободная энциклопедия : (http://ru.wikipedia.org).
8	Полнотекстовая база «Университетская библиотека» : образовательный ресурс : <URL: http://www.biblioclub.ru >.
9	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета : (http // www.lib.vsu.ru/).

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. - М. : Едиториал УРСС, 2004. - 112 с.
2	Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – 2-е изд. - М. : Наука, 1970. - 288 с.
3	Темам Р. Уравнения Навье-Стокса : Теория и численный анализ / Р. Темам ; пер. с англ. В.А. Новикова, А.М. Франка ; под ред. Б.Г. Кузнецова, Н.Н. Яненко. - М. : Мир, 1981. - 407, [1] с. : ил.
4	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=25798>)

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, Calc, Math, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

19. Фонд оценочных средств:

Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Введение в модели гидродинамики	ОПК-2	ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Контрольная работа

2	Введение в функциональные пространства	ОПК-2	ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Контрольная работа
3	Математическая модель, описывающая движение вязкоупругих сред	ОПК-2	ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Контрольная работа
4	Вспомогательное семейство задач	ОПК-2	ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Контрольная работа
Промежуточная аттестация Форма контроля - зачёт			Зачет выставляется при успешной сдаче контрольной работы	

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Примерный перечень задач для контрольной работы №1:

Контрольно-измерительный материал № 1.

1. Эйлеров и Лагранжев подходы описания движения жидкостей.
2. Реологические соотношения.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы.

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с перечнем вопросов и предлагается ответить на данные вопросы. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться литературой и конспектом лекций, ограничение по времени 90 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 120 минут.

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Математическое моделирование динамических систем с памятью» проводится в форме зачёта. Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении зачёта учитываются результаты контрольной работы и учитывается выставленная преподавателем оценка за работу в ходе практических занятий.

Если у обучающегося есть положительная оценка по контрольной работе и положительная оценка работы в ходе обучения по практике, то выставляется зачёт. Если обучающийся не имеет положительной оценки по контрольной работе или практике, или не согласен с этой оценкой, он может ответить на соответствующие вопросы в ходе зачёта.

Примерный перечень вопросов:

1	Определения и основные понятия.
2	Эйлеров и Лагранжев подходы описания движения жидкостей.
3	Эйлеровы и Лагранжевы координаты.
4	Формулы перехода.
5	Виды жидкостей.
6	Тензор напряжений.
7	Тензор скоростей деформаций.
8	Тензор деформаций.
9	Реологические соотношения.
10	Уравнение неразрывности.
11	Классификация сплошных сред.
12	Уравнения движения идеальной жидкости.
13	Уравнения движения вязкой жидкости.
14	О решениях уравнений движения.
15	Свойства операторов гидродинамики.
16	Функциональные пространства гидродинамики.
17	Метод Галеркина.
18	Априорные оценки решений уравнения Навье-Стокса.
19	Сходимость последовательных приближений.

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие **показатели**:

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи лабораторной работы;
- 3) умение работать с информационными ресурсами;
- 4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов обучения на зачете используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения:

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой. Усвоение взаимосвязей основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии.	Зачтено
Пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.	Не зачтено

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

№1 Дана система

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \text{Div} T_H = \rho f;$$

$$\text{div} v(t, x) = 0.$$

Что обозначает v ?

Ответ: **Скорость.**

№2 Дана система

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \text{Div} T_H = \rho f;$$

$$\text{div} v(t, x) = 0.$$

Что обозначает f ?

Ответ: **Внешние силы.**

№3 Дана система

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \text{Div} T_H = \rho f;$$

$$\text{div } v(t, x) = 0.$$

Что обозначает ρ ?

Ответ: **Плотность.**

№4 Дана система

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \text{Div} T_H = \rho f;$$

$$\text{div } v(t, x) = 0.$$

Данная система уравнений описывает движение ... жидкости?

Ответ: **НЬЮТОНОВСКОЙ**

№5 Условие $\text{div } v(t, x) = 0$ называется условием ... среды

Ответ: **несжимаемости.**

№6 Уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta \Delta v + \nabla p = \rho f;$$

называется уравнением ...

Ответ: **Навье-Стокса**

№7 В уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta \Delta v + \nabla p = f;$$

p обозначает?

Ответ: **давление**

№8 В уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta \Delta v + \nabla p = f;$$

η обозначает?

Ответ: **вязкость**

№9 В модели Максвелла скорости деформации имеют вид

а) $\varepsilon_M = \varepsilon_H + \varepsilon_N$

б) $\varepsilon_M = \varepsilon_H - \varepsilon_N$

в) $\varepsilon_M = \varepsilon_H \cdot \varepsilon_N$

Ответ: а)

№10 В модели Максвелла при последовательном соединении напряжение σ_M

а) не существует

б) постоянно

в) переменнo

Ответ: б)

№11 В модели Джеффриса при параллельном соединении скорость деформации ε_J

а) не существует

б) постоянно

в) переменнo

Ответ: б)

№12 В модели Джеффриса при параллельном соединении напряжение имеет вид

а) $\sigma_J = \sigma_M + \sigma_N$

б) $\sigma_J = \sigma_M - \sigma_N$

в) $\sigma_J = \sigma_M \cdot \sigma_N$

Ответ: а)

№13 Тензор скоростей деформации ε имеет вид?

а) $\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$

б) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$

в) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} * \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$

г) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right).$

Ответ: б)

№14 Тензор завихренности W имеет вид?

а) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$

б) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$

$$\text{в) } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$$

$$\text{г) } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Ответ: б)

№15 Если вязкость $\eta = 0$ в уравнении движения жидкости

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta \Delta v + \nabla p = f;$$

то такая жидкость называется?

а) идеальной

б) вязкоупругой

в) неньютоновской

Ответ: а)

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

3) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).

Программа рекомендована НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.